

Полярное соответствие

14 июля

Опр. На плоскости дана окружность ω с центром в точке O . Для точки A построена инверсная ей точка A' . Через точку A' проведена прямая a , перпендикулярная OA' . Прямая a называется полярной точки A ; точка A называется полюсом прямой a .

Будем обозначать точки плоскости большими латинскими буквами, а соответствующие им полярны — маленькими: $A \leftrightarrow a$, $B \leftrightarrow b$, $C \leftrightarrow c$, ...

I. Докажите следующие свойства:

- (а) Точка B лежит на прямой a тогда и только тогда, когда A лежит на прямой b .
- (б) Если точки A и B лежат на прямой c , не проходящей через O , то C — точка пересечения a и b .
- (в) Что будет, если прямая c всё-таки проходит через точку O ? Какую точку проективной плоскости естественно считать её полюсом? Какую прямую естественно считать полярной точки O ?

Полярная двойственность

Для любого утверждения проективной геометрии можно построить «полярно двойственное» при помощи следующей замены:

Точка	Прямая
Полюс	Поляра
Треугольник	Тройка прямых
Четырёхугольник	Четвёрка прямых
Лежит на	Проходит через
Лежат на одной прямой	Проходят через одну точку
Касательная	Точка касания

Опр. Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке. Двойным отношением четвёрки прямых называется число

$$(ab; cd) = \frac{\sin(a, c)}{\sin(c, b)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(d, b)}.$$

II. Докажите следующие свойства:

- (а) Угол (a, b) между полярными точек A и B равен углу AOB ;
- (б) Если точки A, B, C, D лежат на одной прямой, то их двойное отношение равно двойному отношению соответствующих им поляр.

1. (а) Из точки A , лежащей вне окружности ω , провели к ней касательные AX и AY . Докажите, что XY — полярная точки A .
- (б) К окружности ω проведены касательные a и b . Они высекают отрезок XY на третьей касательной c . Докажите, что угол XOY не зависит от положения касательной c .
2. **Гармонический четырёхугольник.** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Известно, что касательные к ω , проведённые в точках A и C , пересекаются на прямой BD . Докажите, что касательные, проведённые в точках B и D , пересекаются на прямой AC .
3. Для следующих утверждений сформулируйте полярно двойственные:
- (а) Через любые две точки можно провести единственную прямую.
- (б) Три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их полярные пересекаются в одной точке.
- (в) **Точка Жергонна.** Прямые, соединяющие точки касания вписанной окружности треугольника с противоположными вершинами, пересекаются в одной точке.
- (г) **Теорема Брианшона.** В описанном около окружности шестиугольнике три диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.
- (д) **Теорема Дезарга.** Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 лежат на одной прямой.
4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Прямые AC и A_1C_1 пересекаются в точке B' . Докажите, что прямая BB_1 перпендикулярна прямой, проходящей через B' и центр вписанной окружности.
5. Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон в точках A' , B' , C' . Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.
6. **Лемма 255.** Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает биссектрису угла BAC в точке Q . Докажите, что угол CQA прямой.
7. (а) Через точку A к окружности ω проведена секущая CD . Полярная a пересекает CD в точке B . Докажите, что четвёрка точек A, B, C, D — гармоническая.
- (б) **Основное свойство полярного соответствия.** Через точку A к окружности ω проведена пара секущих KL и MN . Докажите, что KM пересекает LN на прямой a .
8. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X . Докажите, что прямая XH перпендикулярна медиане из вершины C .
9. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность ω . Диагональ AC пересекает ω в точках P и Q . Точка M — середина PQ . Докажите, что $\angle BMC = \angle DMC$.